SÉRIE DE RÉVISION N°3.

EXERCICE N°1 :

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On donne le plan P : $2x - y - 2z = 0$ et la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$.

1/ Déterminer le centre I et le rayon R de la sphère.

2/ Montrer que $S \cap P$ est un cercle ζ dont on précisera le centre H et le rayon r.

3/ trouver une équation de la sphère S' de centre J(0, 1, -1) et tangent à P.

4/ Soit Δ la droite perpendiculaire à P et passant par I et Δ' la droite passant par A(0, 0, 4) et de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

a- Déterminer les représentations paramétrique deΔ et Δ'.

b- En déduire $\Delta \cap \Delta'$.

5/ a- Trouver une équation du sphère S'' de diamètre [CD] avec C(-3, 2, 1),D(1, 0, 1)

b- Déterminer l'équation du plan médiateur de [CD].

EXERCICE N°2 :

Soit u_n la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1/ a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, $0 \le u_n \le 3$.

b- Montrer que u_n est croissante .

c- En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite.

2/ a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN : $|u_{n+1} - 3| \le \frac{1}{3}|u_n - 3|$

b- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN : $|u_n - 3| \le \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

c- Retrouver la limite de u_n .

EXERCICE N°3 :

On considère la fonction f définie sur [0, +∞[par : $\begin{cases} f(x) = x(2 - \ln x) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1/ Montrer que f est continue à droite en 0

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ Etudier les variations de f et tracer (ζ_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ On considère la suite u_n définie sur IN par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrer que : $1 \le u_n \le e$.

5/ Montrer que u_n est une suite croissante.

6/ En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite.

7/ On pose : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, pour tout n $\in$ IN .

a- Montrer que : $v_n = 2 - \ln u_n$ et que $v_{n+1} - v_n = -\ln v_n$, n $\in$ IN

b- En déduire que v_n est décroissante.

c- En déduire que v_n est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE N°4 :

Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$

1/ Montrer que $\forall$ n $\in$ IN : $u_n \geq 1$

2/ Montrer que u_n est décroissante.

3/ En déduire que la suite u_n est convergente.

4/ Soit v la suite définie sur IN par : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

a- Montrer que u est une suite arithmétique de raison ½.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Retrouver la limite de u_n .

EXERCICE N°5 :

Soit la suite I définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$

1/ a- Calculer I_0 puis I_1 à l'aide d'une intégration par partie.

b- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN , $2I_{n+1} = e^2 - (n + 1)I_n$, en déduire la valeur de I_2 .

c- Calculer : $I = \int_0^1 (x-2)^2 e^{2x} dx$

2/ a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN , I_n est décroissante.

b- Vérifier que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

c- Déduire que I_n est convergente.

d- Montrer que pour tout n $\in$ IN : $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+1}$

e- Déduire la limite de I_n puis la limite de nI_n lorsque n tend vers + ∞.

EXERCICE N°6 :

On considère la suite réelle I_n définie sur IN par $I_0 = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}$ et pour $n \geq 1, I_n = \int_0^1 \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} dt$

1/ a- Calculer $I_0 + I_1$ sachant que : $\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4}$, en déduire I_1 .

b- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN , $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$ puis déduire I_2 et I_3 .

c- Montrer que la suite I_n est décroissante et minorée par 0, conclure.

2/ a- Montrer que $\forall$ t $\in$ [0 , 1], on a : $0 \leq \dfrac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

b- En déduire que $\forall$ n $\in$ IN , $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

EXERCICE N°7 :

On pose $I_n = \int_0^n e^{-x} dx$ avec $n \in$ IN

1/ a- Vérifier que $\forall$ n $\in$ IN , on a : $I_n = 1 - e^{-n}$.

b- Montrer que la suite I_n est décroissante .

c- En déduire que I est convergente puis calculer sa limite.

2/ On pose $S_n = (n + 1) - (I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots\ldots I_n)$, n $\in$ IN* .

a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN* on a : $S_n = e^0 + e^{-1} + e^{-2} + \ldots\ldots\ldots + e^{-n}$.

b- Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$